

Ряды и преобразования Фурье.

Тригонометрические ряды.

Определение 1. Тригонометрическим рядом $T(x)$ называется ряд вида

$$T(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

где

$$A_0(x) = a_0, \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

n -я частичная сумма ряда $T(x)$ имеет вид

$$s_n(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^n A_m(x).$$

Коэффициенты a_n и b_n заданы: первые для $n \geq 0$, вторые для $n \geq 1$. Мы доопределим a_n и b_n также для остальных целых значений n , положив $a_{-n} = a_n$ ($n > 0$), $b_0 = 0$, $b_{-n} = -b_n$ ($n > 0$), и обозначим

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n);$$

так что

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Таким образом, мы можем записать частичные суммы ряда $T(x)$ как

$$s_n(x) = c_0 + \sum_{m=1}^n \left\{ (c_m + c_{-m}) \cos mx + i(c_m - c_{-m}) \sin mx \right\} = \sum_{m=-n}^{m=n} c_m e^{imx},$$

а сам ряд, как

$$T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Исходный и получившийся ряды называются *действительным* и *комплексным тригонометрическими рядами*, соответственно.

Если тригонометрический ряд имеет суммой функцию $f(x)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$, то его коэффициенты могут быть просто выражены через $f(x)$. Допустим, например, что ряд сходится равномерно:

Определение 2. Ряд сходится *равномерно* на отрезке $[a, b]$, если для всякого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n \geq N$ и для всех x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$| \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) - s_n(x) | \leq \varepsilon.$$

Тогда, помножив на $\cos mx$ и на $\sin mx$ или, в комплексном случае, на e^{imx} , проинтегрировав почленно от $-\pi$ до π , используя известные формулы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases},$$

найдем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (*)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

Если f действительно, то a_n и b_n действительны, а c_n и c_{-n} сопряжены. Если f нечетно, то $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Если f четно, то $b_n = 0$ и формула для a_n преобразовывается аналогично.

Ряд Фурье для функции периода 2π .

Пусть задана некоторая функция $f(x)$ периода 2π , и мы хотим представить эту функцию в виде суммы тригонометрического ряда. Если такое представление возможно, то

коэффициенты a_n и b_n необходимо получаются с помощью формул (*). Определенные этим способом коэффициенты a_n и b_n называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее *рядом Фурье*. Наиболее часто используемым классом функций, для которых возможно их представление в виде ряда Фурье являются кусочно-гладкие функции.

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем конечное число разрывов первого рода (*разрывами первого рода функции $g(x)$* называются точки x_0 , где $g(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} g(x) = g(x_0 + 0)$).

Утверждение 1. Ряд Фурье функции $f(x)$ периода 2π , кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, сходится для всех значений x , причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ в каждой точке разрыва. Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно (т.е. сходится ряд из абсолютных величин членов исходного ряда) и равномерно.

Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье.

Пусть $f(x)$ - функция, заданная для всех действительных x и кусочно-гладкая на каждом конечном интервале $[-l, l]$. Тогда на каждом таком отрезке $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

причем

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du. \quad (**)$$

Пусть существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Тогда имеет место формула (*интегральная формула Фурье*):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

а интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

называют *интегралом Фурье*.

Приведем соображения, поясняющие идею получения этой формулы.

Из (**), при $l \rightarrow \infty$ (x - фиксировано) получаем:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du.$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе сумма справа. С этой целью обозначим:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \dots,$$

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(u) \cos \omega_n (u-x) du,$$

напоминающий интегральную сумму для функции переменного ω

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du,$$

составленную для промежутка $[0, +\infty]$, что и позволит ожидать выполнения интегральной формулы Фурье.

Преобразование Фурье.

Исходя из интегральной формулы Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \omega(u-x) du ,$$

и, учитывая, что для нечетной функции $f(u) \sin \omega(u-x)$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega(u-x) du ,$$

можно получить, складывая первую из этих формул со второй, умноженной на i , что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u-x)} du \quad (\text{Интегральная формула Фурье в комплексной форме}).$$

Если обозначить

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du ,$$

то получаем, что

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega . \quad (***)$$

Эти формулы образуют пару *взаимных преобразований Фурье*, причем функцию $F(\omega)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f(x)$. Формула (***) называется *формулой обращения Фурье*.

Формула

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du$$

может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода относительно функции $f(u)$.

Формула обращения дает решение этого интегрального уравнения.

Из интегральной формулы Фурье можно получить так называемые *синус-* и *косинус-* *преобразования Фурье*.

Например, считая $f(u)$ нечетной на $(-\infty, \infty)$, получаем пару взаимных *синус-преобразований Фурье*:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u du ,$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega .$$