1. Тригонометрический ряд

Определение 1. *Тригонометрическим рядом* $T(x)$ называется ряд вида

$$T(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

где

$$A_0(x) = a_0, \; A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

2. Равномерная сходимость

Определение 2. Ряд сходится *равномерно* на отрезке $[a,b]$, если для всякого положительного числа ε существует число N такое, что для всех $n \geq N$ и для всех x из отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство

$$|\lim_{m\to\infty} s_m(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon.$$

3. Ряд Фурье

$$T(x) = \frac{1}{2} A_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(x),$$

тригонометрический ряд $A_0(x) = a_0, \; A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx .$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx .$$

с коэффициентами: , где

$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$.

4. Кусочно-гладкая функция

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют *кусочно-гладкой* на отрезке $[a,b]$, если она сама и ее производная либо непрерывны на этом отрезке, либо допускают на нем конечное число разрывов первого рода (*разрывами первого рода функции* $g(x)$ называются точки x_0, где $g(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} g(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} g(x) = g(x_0+0)$).

Утверждение 1. Ряд Фурье функции $f(x)$ периода 2π, кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, сходится для всех значений x, причем его сумма равна $f(x)$ в каждой точке непрерывности и равна числу $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в каждой точке разрыва. Если $f(x)$ всюду непрерывна, то ряд сходится абсолютно (т.е. сходится ряд из абсолютных величин членов исходного ряда) и равномерно.

5. Интегральная формула Фурье и интеграл Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\omega(u-x)\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\omega(u-x)\,du\,,$$

а интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\omega(u-x)\,du\,,$$

называют *интегралом Фурье.*

6. Интегральное преобразование

Интегральным преобразованием на полупрямой будем называть интеграл вида

$$I_f(\alpha)=\int_0^\infty K(x,\alpha)f(x)\,dx\,, \tag{2.3}$$

где $f(x)\in\mathfrak{I}, \mathfrak{I}$ - некоторый функциональный класс, а $K(x,\alpha)$ - известная функция, которая называется ядром интегрального преобразования.

Примеры интегральных преобразований:

- При $K(x,\alpha)=x^{\alpha-1}$ $I_f(\alpha)$ - преобразование Меллина.
- При $K(x,\alpha)=e^{-\alpha x}$ $I_f(\alpha)$ - преобразование Лапласа.
- При $K(x,\alpha)=\cos\alpha x$ $I_f(\alpha)$ - косинус-преобразование Фурье.

7. Ядро Фурье (определение и теорема)

Определение 2.2

При выполнении условий

$$H(\alpha, x) = K(\alpha, x)$$

для обратного преобразования (2.4), функция $K(\alpha, x)$ называется *ядром Фурье.*

Рассмотрим частный случай $K(x,\alpha) = K(\alpha x) = K(\alpha, x)$.

Теорема 2.1

Для того, чтобы функция $K(x)$ являлась ядром Фурье необходимо, чтобы ее преобразование Меллина

$$\mathbf{K}(s) = \int_0^\infty K(x)\, x^{s-1} dx$$

удовлетворяло равенству

$$\mathbf{K}(s)\mathbf{K}(1-s) = 1.$$

8. Взаимное преобразование Фурье

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega.$$

9. Взвешенное преобразование Фурье (оконное)

$$Gf(\omega, s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x-s) e^{-i\omega x} dx$$

10. Теорема Котельникова-Шеннона

<u>**Теорема**</u>. Пусть $f \in L_1(R) \cap A(R)$ или $f \in L_2(R)$. Предположим, даны константы T, $\Omega > 0$ такие что

$F(\gamma)$ равна 0 вне сегмента $[-\Omega, \Omega]$ (1)

и

$0 < 2T\Omega \le 1$. (2)

Тогда

$$f(t) = 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t - nT)]}{2\pi\Omega(t - nT)}, \quad (3)$$

причем ряд сходится поточечно на R, если $f \in L_1(R) \cap A(R)$, и ряд сходится равномерно, если $f \in L_2(R)$.

Т.о., сигнал, описываемый непрерывной функцией времени f(t) с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы времени $T = 1/(2\Omega)$, где Ω – ширина спектра сигнала.

11. Замечания к теореме Котельникова-Шеннона

Замечание 1. Основой доказательств теоремы в пространствах L_1 и L_2 является возможность перехода от преобразования Фурье к рядам Фурье.

Замечание 2. Нельзя ослабить условие (2) теоремы.

Замечание 3. В формуле (3) константу T обычно называют периодом дискретизации, последовательность $\{f(nT) : n \in Z\}$ –последовательностью дискретизированных значений. Частота 2Ω называется частотой Найквиста или частотой дискретизации. Это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не было потери информации.

$T \equiv \frac{1}{2\Omega}$ - максимальный период дискретизации, т.е. максимальный приемлемый промежуток времени между передаваемыми импульсами.

Алиасинг:

Замечание 4. На практике восстановленная функция $f_0(t)$, как правило, не совпадает точно передаваемой функцией $f(t)$. Ошибка обусловлена, например, тем, что спектр передаваемой функции $f(t)$ обычно ограничен не резко. Это вытекает хотя бы из того факта, что все реальные сигналы ограничены во времени и, следовательно, имеют неограниченные строго спектры. Выбор интервалов отсчетов $T > 0$ означает, что все спектральные составляющие спектра с частотами $\omega > \Omega_{\max} = \pi/T$ не передаются и не могут быть восстановлены.

Если $2T\Omega > 1$, то исходная функция не может быть восстановлена. Возникающий при этом эффект называется алиасингом - *aliasing* (переводится также как *наложение*).

12. Корреляция

Определение. Взаимной корреляцией (далее просто корреляцей) назовём оператор

$$f \otimes g = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)g(x+u, y+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Нормализованный оператор взаимной корреляции

$$\frac{f \otimes g}{\sqrt{\int\int f^2 \int\int g^2}} \leq 1$$

13. Применение корреляции

Применение корреляции для сравнения изображений. Предположим, что область, где $f > 0$ мала по сравнению с областью $g > 0$. Можно рассматривать f как шаблон (часто говорят *фильтр*). Нормализованная взаимная корреляция f и g в точке (x, y) будет равна 1 только в случае совпадения с точностью до множителя областей f и g.

14. Свертка. Теорема о свертке.

Определение. Свёрткой назовём оператор

$$f * g = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)g(x-u,y-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Это равенство может быть переписано как

$$f * g = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(-u,-v)g(x+u,y+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Теорема. (О свёртке) Пусть $f \in L^1(R)$ и $h \in L^1(R)$. Функция $g = h * f$ принадлежит $L^1(R)$ и

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) \quad (\hat{g}\text{— преобр. Фурье g})$$

15. Свойства свертки и корреляции

1. $f \otimes g = g \otimes f$
2. $f * g = g * f$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $f(x,y) * g(x,y) = f(-x,-y) \otimes g(x,y)$

16. Формулы Парсеваля и Планшереля (теорема)

Теорема. Если функции f и h принадлежат $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{h}^*(w)\,dw, \tag{1}$$

при $h = f$ из этого следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2\,dw. \tag{2}$$

(1) – формула Парсеваля;
(2) – формула Планшереля.

17. Теорема о невозможности одновременного существования компактного носителя для функции и ее преобразования Фурье

Теорема. Если $f \neq 0$ имеет компактный носитель, то $\hat{f}(w)$ не может иметь компактного носителя. Аналогично, если $\hat{f}(w)$ имеет компактный носитель, то $f(t)$ не может иметь компактного носителя.

18. Основные соотношения между пространственной и частотной информацией

Определённый интеграл. Определённый интеграл от функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен значению преобразования Фурье в 0.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(0), \quad (f \doteqdot F)$$

Первый момент.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{F'(0)}{-2\pi i}.$$

Центроид.

$$\langle x \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x}.$$

$\langle x \rangle$ можно рассматривать как центр масс стержня с распределением плотности $f(x)$, или как время сигнала, если рассматривать функцию $f(t)$ как зависимость энергии сигнала от времени.

Связь центроида с преобразованием Фурье:

$$\langle x \rangle = -\frac{F'(0)}{2\pi i F(0)}.$$

Второй момент (момент инерции).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{F''(0)}{-4\pi^2}.$$

Моменты.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{F^{(n)}(0)}{(-2\pi i)^n}$$

Среднеквадратичная абсцисса

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)}.$$

Дисперсия.

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) \mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x} = -\frac{F''(0)}{4\pi^2 F(0)} + \frac{(F'(0)^2)}{4\pi^2 (F(0))^2}.$$

$$\sigma^2_{f*g} = \sigma^2_f + \sigma^2_g.$$

Ширина локализации.

$$W_f = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s) \mathrm{d}s} = \frac{1}{W_F}.$$

19. Соотношение неопределенности

Соотношение неопределённости. Обозначим $(\triangle x)^2$ дисперсию $|f(x)|^2$, а $(\triangle s)^2$ - второй момент $|F(s)|^2$.

$$(\triangle x)^2 (\triangle s)^2 \leq \frac{1}{4\pi}.$$

20. Неравенство Шварца

Неравенство Шварца. Для действительных функций

$$\left[\int g(x) f(x) \mathrm{d}x \right]^2 \leq \int g^2(x) \mathrm{d}x \int f^2(x) \mathrm{d}x.$$

Для комплексных функций:

$$\left[\int (g^*(x) f(x) + g(x) f^*(x)) \mathrm{d}x \right]^2 \leq 4 \int g g^*(x) \mathrm{d}x \int f f^*(x) \mathrm{d}x$$

21. Функция Габора для плоскости и ее преобразование Фурье

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)+2\pi i W x],$$

$$G(u,v) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(u-W)^2}{\sigma_u^2}+\frac{v^2}{\sigma_v^2},\right]\right\}$$

где $\sigma_u = 1/2\pi\sigma_x$ и $\sigma_v = 1/2\pi\sigma_y$.

Фильтрация изображения $I(x,y)$ функцией $g_{mn}(x,y)$ будет иметь результат

$$W_{mn}(x,y) = \int I(x,y) g^*_{mn}(x-x_1, y-y_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1.$$

22. Многочлены Эрмита

Ссылки. Многочлены Эрмита ортогональны на всей числовой оси с весом $p(x) = e^{-x^2}$, и определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \tag{4}$$

Иногда рассматриваются другие многочлены Эрмита, определяемые формулами

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{-x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2};\ H_n^*(x) = 2^{-n/2}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как для $H_n(x)$ верны равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 2^n\sqrt{\pi}n! & \text{при } m = n, \end{cases}$$

ортонормированную систему образуют многочлены

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^{n/2}(n!)^{1/2}\pi^{1/4}}.$$

23. Теорема Сонина

Теорема Сонина. Если функция $u(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[a,b]$ и удовлетворяет там уравнению

$$u'' + \varphi(t)u = 0, \tag{1}$$

в котором функция $\varphi(t)$ положительна и непрерывно дифференцируема в интервале (a,b), причем ее производная $\varphi'(t)$ положительна (отрицательна), то относительные максимумы величины $|u(t)|$ убывают (возрастают) при возрастании t от a до b.

24. Проекционная фильтрация при помощи функций Эрмита

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$F(\varphi_n) = i^n \varphi_n,$$

где F—оператор преобразования Фурье.
Базовые линии:

$$baseline_j(i) = I[j,0] + \frac{I[j,width] - I[j,0]}{width} \cdot i.$$

Аппроксимированные линии:
Необходимо:

- выбрать количество функций Эрмита для фильтрации - n.
- Растянуть отрезок аппроксимации $[-A_0, A_0]$ до отрезка $[-A_1, A_1]$, определенного по следующему критерию:

$$\int_{-A_1}^{A_1} \varphi_n^2(x)\, dx = 0.99,$$

- Разложить f(x) в ряд Фурье

$$value(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i(x)$$

$$c_i = \int_{-A_1}^{A_1} f(x) \varphi_i(x)\, dx.$$

Так как функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье, то мы получаем и аппроксимацию преобразования Фурье для j-уровня исходного изображения.

Функции Эрмита позволяют нам разделить "декодированное изображение"(низкочастотная часть) и "изображение разности"(высокочастотная часть).

25. Устойчивость решения СЛАУ

$Ax = f$ (1)

$A\tilde{x} = \tilde{f}.$ (2)

$\delta x = \tilde{x} - x,\ \delta f = \tilde{f} - f.$

Система (1)
устойчива по правой части, если при любых f, f справедлива оценка

$$\|\delta x\| \leqslant M_1 \|\delta f\|, \quad (3)$$

где $M_1 > 0$—постоянная, не зависящая от правых частей f, $\tilde{f}$. Оценка выражает факт непрерывной зависимости решения от правой части: $\|\delta x\| \to 0$ при $\|\delta f\| \to 0$.

если $det A \neq 0$, то система (1) устойчива по правой части

Число обусловленности:

$M_A = \|A^{-1}\| \|A\|.$

Матрицы с большим числом обусловленности – плохо обусловленные.

Свойства числа обусловленности:

1). $M_A \geqslant 1$.

2). $M_A \geqslant \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$, где $\lambda_{max}(A)$ и $\lambda_{min}(A)$—соответственно наибольшее и наименьшее по модулю собственные числа матрицы A.

3). $M_{AB} \leqslant M_A M_B$.

26. Преобразование Гильберта

Позволяет разложить исходные процесс на две составляющие – амплитудную и фазовую.

$$H[x(t)] = \frac{1}{\pi} pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Ортогональны в l2.

Преобразование Гильберта от косинуса – синус.

Умножение x на c не приведет к изменению фазы, только амплитуда изменится.

27. Преобразование Хуанга–Гильберта

$f(t) = r(t) + \sum_{i=1}^{N} \psi_i(t)$ Empirical Mode Decoposition.

$f(t)$ - исходный сигнал;

$r(t)$ - остаток (монотонная функция);

$\psi_i(t)$ - множество функций различной частоты.